Problemas Introductorios

para la

37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Luis Miguel García Velázquez
José Antonio Gómez Ortega
María Luisa Pérez Seguí

2023

Luis Miguel García Velázquez

Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia,
Universidad Nacional Autónoma de México

José Antonio Gómez Ortega

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México

María Luisa Pérez Seguí

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Contenido

Presentación . . . . **i**

Etapas de las Olimpiadas ii

Resumen de Resultados ii

Resultados de las Delegaciones que han representado a México en Concursos Internacionales iii

Resultados en el Concurso Nacional de la 36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas vii

Material de estudio e información sobre la OMM viii

Enunciados de los problemas **1**

Soluciones de los Problemas **15**

Concentrado de Respuestas **30**

Información de Contacto **31**

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana, a través del Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, organiza la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, la 7^a Olimpiada Matemática Mexicana de Educación Básica y la 2^a Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas. A partir de estos concursos se integrarán las selecciones que participarán en las distintas olimpiadas internacionales del año 2024: la 65^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse en Reino Unido durante el mes de julio, la XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevará a cabo en septiembre, la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se realizará en el mes de junio, la 13^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas a realizarse en el mes de abril, la 26^a Competencia Internacional de Matemáticas y la 3^a Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas, entre otros concursos de nivel internacional.

En la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar estudiantes de México que hayan nacido después del 1^o de agosto de 2004. Quienes concursen deberán tener inscripción en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2022-2023, y para el 1^o de julio del año 2024 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

En este folleto se incluyen problemas que aparecieron en las primeras etapas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas con la idea de que este material sirva como orientación a quienes desean participar por vez primera; como se puede ver, no se presentan ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en el escuela; éstos son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con otras personas.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que en general requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a quienes leen este folleto: docentes, estudiantes, ex-participantes y participantes, a que nos envíen problemas junto con su solución. Las aportaciones serán consideradas para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.

Los problemas de este folleto se propusieron en el Canguro Matemático Mexicano y tienen distintos niveles. Los comités estatales utilizaron los problemas a su conveniencia. En muchos estados los problemas aquí presentados fueron aplicados en los exámenes de diferentes etapas del proceso estatal.

Los problemas que aparecen en esta publicación se presentan en orden creciente de dificultad. Hasta el problema 50 formaron parte de los distintos niveles del Canguro Matemático Mexicano; los primeros 25 de ellos pueden resolverse con conocimientos mínimos de 4^o de primaria. Los problemas a partir del 51 corresponden a las primeras fases de un concurso estatal y suponen un entrenamiento previo de nivel básico.

Para continuar con una preparación, puede consultar la página de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: *www.ommenlinea.org*, donde encontrara información y materiales que lo orientarán.

Etapas de las Olimpiadas

Las Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas constan de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán a los concursos nacionales.

Concursos Nacionales. En los concursos nacionales se eligen las preselecciones mexicanas.

Entrenamientos. A quienes integren las preselecciones que surjan de los concursos nacionales se les entrenará intensivamente durante los meses previos a los concursos internacionales anuales. También se aplicarán exámenes para determinar a las selecciones que representarán a México en las diferentes Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es individual.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato, Ixtapan de la Sal, Campeche, Zacatecas, Saltillo, San Carlos, Campeche, Ensenada, San Luis Potosí, Guanajuato, Huasca, Toluca, Guadalajara, Acapulco, Monterrey, Campeche, Ciudad de México, en los años 2020 y 2021 en forma virtual, Oaxtepec.

Resultados de las Delegaciones que han representado a México en Concursos Internacionales

Olimpiada Internacional de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37
2005	México	91	31
2006	Eslovenia	90	24
2007	Vietnam	92	37
2008	España	97	37
2009	Alemania	104	50
2010	Kasajistán	97	33
2011	Holanda	101	22
2012	Argentina	100	31
2013	Colombia	97	17
2014	Sudáfrica	101	26
2015	Tailandia	104	19
2016	Hong Kong	109	23
2017	Brasil	112	43
2018	Rumania	107	36
2019	Reino Unido	112	41
2020	Rusia	105	45
2021	Rusia	107	34
2022	Noruega	104	23

En 2022, cada integrante de la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional obtuvo un reconocimiento. Ellos fueron: Daniel Alejandro Ochoa Quintero de Tamaulipas, Omar Fraid Astudillo Marban de Guerrero que obtuvieron medalla de plata, los siguientes cuatro medalla de bronce, Leonardo Mikel Cervantes Mateos de la Ciudad de México, Rogelio Guerrero Reyes de Aguascalientes, Diego Alonso Villarreal Grimaldo de Nuevo León y Ana Illanes Martínez de la Vega de la Ciudad de México. En total, en la IMO se han obtenido 4 medallas de oro, 30 medallas de plata, 76 medallas de bronce y 39 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5
2005	Colombia	22	2
2006	Ecuador	21	1
2007	Portugal	22	4
2008	Brasil	21	6
2009	México	21	5
2010	Paraguay	21	3
2011	Costa Rica	21	1
2012	Bolivia	19	6
2013	Panamá	20	3
2014	Honduras	22	1
2015	Puerto Rico	23	4
2016	Chile	22	4
2017	Argentina	22	4

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
2018	España-Portugal	22	4
2019	México	23	4
2020	Perú	23	2
2021	Costa Rica	22	3
2022	Colombia	20	3

Cada participante de la delegación mexicana en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en 2022 obtuvo medalla. La delegación estuvo integrada por: Rogelio Guerrero Reyes de Aguascalientes (medalla de oro), Leonardo Mikel Cervantes Mateos de la Ciudad de México (medalla de bronce), Diego Alonso Villarreal Grimaldo de Nuevo León (medalla de plata), y Eric Ranson Treviño de Nuevo León (medalla de plata). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas México ha obtenido 31 medallas de oro, 58 medallas de plata, 39 medallas de bronce y 4 menciones honoríficas.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1
2005	El Salvador	12	1
2006	Panamá	12	1
2007	Venezuela	12	1
2008	Honduras	12	2
2009	Colombia	12	1
2010	Puerto Rico	16	1
2011	México	12	1
2012	El Salvador	12	1
2013	Nicaragua	13	1
2014	Costa Rica	12	1
2015	México	13	1
2016	Jamaica	13	1
2017	El Salvador	14	1
2018	Cuba	12	1
2019	República Dominicana	12	1
2020	Panamá	13	1
2021	Colombia	12	1
2022	Costa Rica	12	1

En la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, de la delegación mexicana obtuvieron medalla de oro los alumnos Emiliano Hernández Barranco del Estado de Morelos, Alonso Baeza Quevedo de Baja California Sur y Luis Veudi Vivas Pérez de Quintana Roo y medalla de plata el alumno Alan Alejandro López Grajales de Chiapas. La delegación nacional obtuvo el primer lugar por países. En total, en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, México ha obtenido 46 medallas de oro, 28 de plata y 3 de bronce.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas			
Año	País sede	No. de países	Lugar de México
2014	Turquía	28	17
2015	Bielorusia	30	9
2016	Rumania	39	13
2017	Suiza	44	14
2018	Italia	56	7
2019	Ucrania	50	10
2020	Holanda	53	6
2021	Georgia	55	6
2022	Hungria	57	15

En abril de 2022 México participó en la 11^{a} Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO, por sus siglas en inglés) en Hungria. Esta olimpiada es para países europeos pero se permite la participación por invitación de otros equipos. El equipo mexicano fue integrado por Ana Illanes Martínez de la Vega de la Ciudad de México (medalla de plata), Andrea Escalona Contreras de Morelos (medalla de bronce), Cynthia Naely López Estrada de Guanajuato (medalla de plata) y Rosa Victoria Cantú Rodríguez de la Ciudad de México (medalla de bronce). En total, en la Olimpiada Europea Femenil, México ha obtenido 5 medallas de oro, 14 medallas de plata, 13 medallas de bronce y una mención honorífica.

Resultados en el Concurso Nacional de la 36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2022 se llevó a cabo en Oaxtepec, Morelos el Concurso Nacional de la 36ª OMM, con la participación de treinta y dos estados de la República. Los ganadores de primer lugar fueron:

Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes),
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León),
Eric Ransom Treviño (Nuevo León),
Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León),
Diego Caballero Ricaurte (Ciudad de México),
Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur),
Emiliano Hernández Barranco (Ciudad de México),
Luis Veudi Vivas Pérez (Quintana Roo),
David García Maldonado (Oaxaca),
Carlos Fernando Martínez Quintero (Ciudad de México),
Franco Giosef Álvarez González (Chiapas),
Mateo Iván Latapi Acosta (Ciudad de México),
Juan Alfonso Pérez Mondragón, (Puebla),
Enrique Rabell Talamantes, (Querétaro),
Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa).

La preselección para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe queda integrada por:

Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos),
Leonardo Melgar Rubí (Morelos),
Juan Luis Manríquez Sequera (Baja California Sur),
Iker Torres Terrazas (Chihuahua),
Sebastian Daw Bonilla (Querétaro),
Rodrigo Saldívar Mauricio (Zacatecas),
Rafael Argumedo Solís (Zacatecas),
Isaac Emanuel Rodríguez Ibarra (Chiapas),
Sofía Constanza Santisteban Dávila (Quintana Roo).

La preselección para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas es:

Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos),

Claudia Itzel Pérez Lara (Hidalgo),
María Fernanda López Tuyub (Yucatán),
Andrea Escalona Contreras (Morelos),
Camila Campos Juárez (Sinaloa),
Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas),
Isabela Loredo Carvajal (Tamaulipas).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 36º Concurso Nacional de la OMM:

1. Nuevo León
2. Ciudad de México
3. Jalisco
4. Morelos
4. Guerrero
6. Baja California Sur
7. Aguascalientes
8. Sinaloa
9. San Luis Potosí
10. Chiapas

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por la delegación de Sonora. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Nayarit y Baja California Sur.

Material de estudio e información sobre la OMM

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar otro material de estudio disponible, te invitamos a visitar el sitio de Internet:

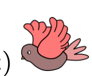
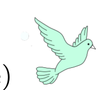
`http://ommenlinea.org/`

EL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Febrero 2023

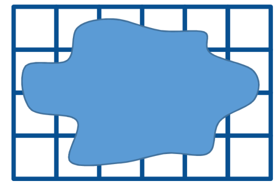
Enunciados de los problemas

Los siguientes problemas son de nivel introductorio y fueron usados en exámenes de diferentes concursos de olimpiada de matemáticas. Los primeros 25 corresponden al Concurso Canguro Mexicana de año 2022 de los niveles Escolar y Benjamín, y del 26 al 50 a los niveles Cadete y Estudiante. Los conocimientos necesarios para resolver los primeros 25 corresponde al ciclo escolar de la primaria y los segundos al ciclo escolar de secundaria. Lee con cuidado para entender qué se pide en cada caso.

Problema 1. ¿Cuál de los pájaros, al seguir su trayectoria, llega al final en medio de todos?

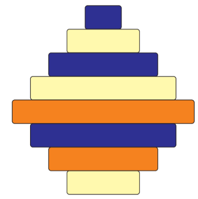
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

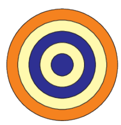
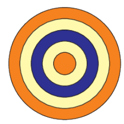
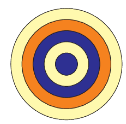
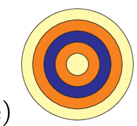
Problema 2. Se derramó tinta en un pedazo de papel cuadriculado como se ve en la figura. ¿Cuántos cuadrados tienen tinta?



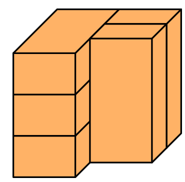
(a) 16 (b) 17 (c) 18 (d) 19 (e) 20

Problema 3. Varios discos forman una torre como muestra la figura. ¿Cuál de los esquemas muestra la vista de la torre desde arriba?



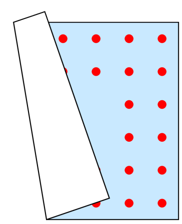
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 4. La construcción que se muestra se hizo con 5 ladrillos iguales. ¿Cuántos ladrillos están tocando exactamente a otros 3?



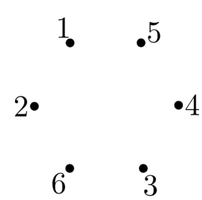
(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 (e) 1

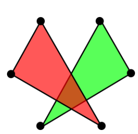
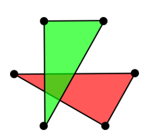
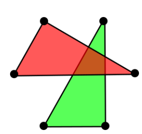
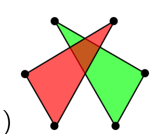
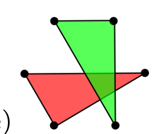
Problema 5. Aladino tiene un tapete en forma de cuadrado. A lo largo de cada lado del tapete hay dos líneas de puntos, la misma cantidad en cada línea. El tapete está doblado, así que no se ven todos los puntos. ¿Cuántos puntos hay?



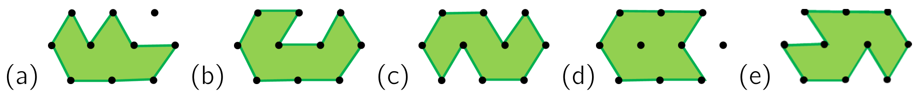
(a) 48 (b) 44 (c) 40 (d) 36 (e) 32

Problema 6. En la figura, los puntos están numerados del 1 al 6. Se unen entre sí los puntos con número impar para formar un triángulo, y también se unen entre sí los puntos con número par para formar otro triángulo. ¿Cómo quedan los triángulos?

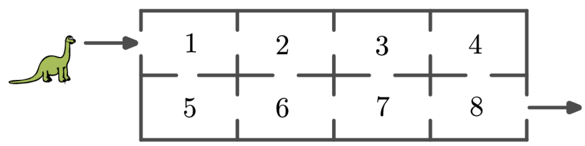


(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 7. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene menor área?

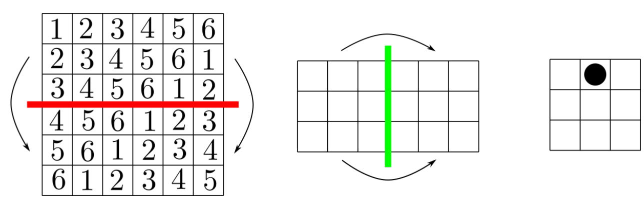


Problema 8. Cuando Dino camina por los cuartos, va sumando los números que encuentra. Si sólo puede pasar por cada cuarto a lo más una vez, ¿cuál es la máxima suma que puede obtener?



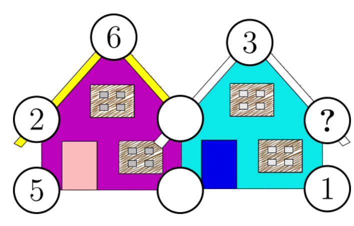
(a) 27 (b) 29 (c) 32 (d) 34 (e) 36

Problema 9. Juana dobla la cuadrícula de números dos veces como se muestra. Después hace un hoyo en el círculo negro marcado. ¿Cuál es la suma de los números por los que se hizo la perforación?



(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16 (e) 18

Problema 10. La suma de los 5 números en cada casa es 20 pero sólo se ven algunos. ¿Qué número va donde está el signo de interrogación?

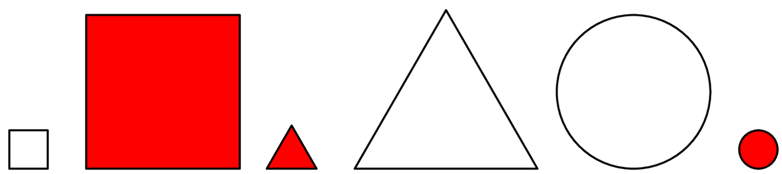


(a) 3 (b) 4 (c) 7 (d) 9 (e) 14

Problema 11. En un papel rectangular cuadriculado se sombrea un cuadrito. Arriba del cuadrito sombreado hay 2 cuadritos, abajo hay uno solo, a la izquierda hay 3 cuadritos y a la derecha hay 5 cuadritos. ¿Cuántos cuadritos en total tiene el papel?

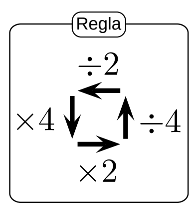
(a) 10 (b) 17 (c) 18 (d) 27 (e) 36

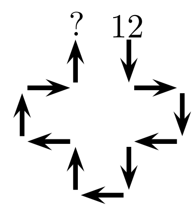
Problema 12. ¿Cuál es el mínimo número de figuras que deben escogerse de entre las seis que se muestran para que se cumpla que entre las figuras que se escogen haya 2 sombreadas, 2 grandes y 2 redondas?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

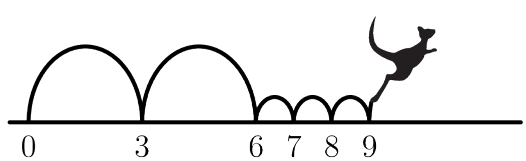
Problema 13. Usando la figura de la derecha y empezando con el número 12, al seguir las flechas, se hacen las operaciones según la regla que se indica en la figura de la izquierda. ¿A qué resultado se llega?





(a) 3 (b) 6 (c) 12 (d) 24 (e) 48

Problema 14. Cangu saltará sobre la recta numérica siguiendo siempre la misma rutina: dar dos saltos de longitud 3 seguidos de tres saltos de longitud 1. Comenzará en 0 y repite su rutina una y otra vez, hasta pasarse de 100. ¿Cuál de los siguientes números pisará Cangu?



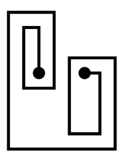
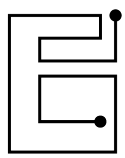
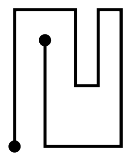
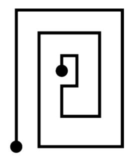
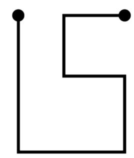
(a) 82 (b) 83 (c) 84 (d) 85 (e) 86

Problema 15. Moisés escribió números en los cuadritos y quería que la suma de los números en cada renglón y cada columna fuera la misma, pero se equivocó en un número. ¿Cuál es el número incorrecto?

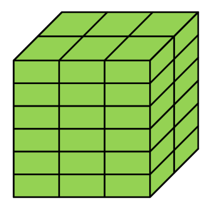
9	1	5
3	7	6
4	7	4

(a) 3 (b) uno de los 4 s (c) 5 (d) uno de los 7 s (e) 9

Problema 16. Car armó una autopista de juguete. Resultó que su coche sólo dio vueltas hacia la izquierda. ¿Cuál puede ser el esquema de la autopista?

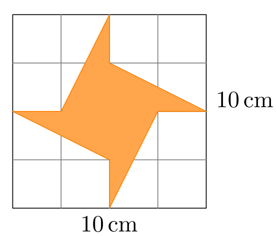
(a) 
(b) 
(c) 
(d) 
(e) 

Problema 17. El cubo de la figura de la derecha se construyó utilizando ladrillos iguales. El lado menor de cada uno de los ladrillos mide 4 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de cada ladrillo?



(a) 4 cm $\times$ 6 cm $\times$ 12 cm (b) 4 cm $\times$ 6 cm $\times$ 16 cm (c) 4 cm $\times$ 8 cm $\times$ 12 cm (d) 4 cm $\times$ 8 cm $\times$ 16 cm (e) 4 cm $\times$ 12 cm $\times$ 16 cm

Problema 18. Si el área del cuadrado que se muestra en la figura es de 100 cm^2, ¿cuántos cm^2 tiene el área de la figura sombreada?

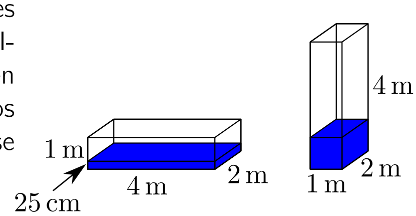


(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 35 (e) 40

Problema 19. En una elección en una escuela hay 5 candidatas. Cuando ya se ha contado el 90% de los votos, resulta que Ale tiene 11 votos, Beti tiene 10, Cintia tiene 9, Diana tiene 8 y Elia tiene 7. ¿Cuántas de estas candidatas todavía pueden ganar?

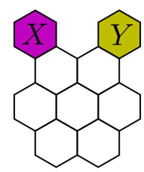
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 20. Un tanque tiene dimensiones $1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$. El agua alcanza $25\,\mathrm{cm}$ de altura cuando está colocado como se muestra en la figura de la izquierda. ¿Cuántos centímetros de altura alcanza el agua cuando el tanque se voltea como se muestra a la derecha?



(a) 25 (b) 50 (c) 75 (d) 80 (e) 100

Problema 21. ¿Cuántos caminos hay que van del hexágono marcado con X al hexágono marcado con Y, si la única forma de pasar de un hexágono a otro es a través de un lado común entre ellos, y se debe pasar por cada uno de los hexágonos blancos exactamente una vez?

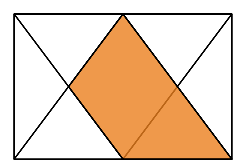


(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 22. El promedio de las edades de Ana, Beatriz y Carmen es 10. Sabemos que todas sus edades son distintas, y que el promedio de las edades de Ana y Beatriz es 11, mientras que el promedio de las edades de Beatriz y Carmen es 12. ¿Cuál es la edad de la mayor de ellas?

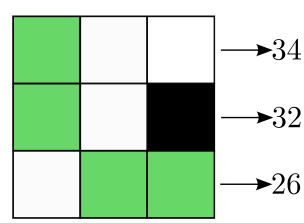
(a) 10 (b) 12 (c) 13 (d) 16 (e) 17

Problema 23. En el rectángulo de la figura, los puntos medios de los lados más grandes están unidos a los vértices del rectángulo. ¿Qué fracción del rectángulo está sombreada?



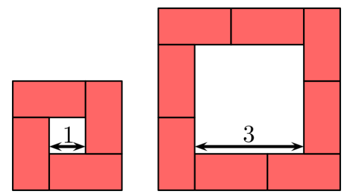
(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{3}{5}$

Problema 24. En cada cuadro de la cuadrícula se debe escribir un número. Si en los cuadros del mismo color los números son iguales, y a la derecha de cada renglón se ha puesto la suma de los números del renglón, ¿qué número va en el cuadro negro?



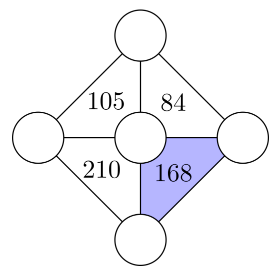
(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

Problema 25. Con fichas de $2\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ se forma un marco alrededor de cuadrados, como se muestra en los casos en que los cuadrados son de $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$ y $3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$, respectivamente. ¿Cuántas fichas se necesitan para rodear un cuadrado de $19\,\text{cm} \times 19\,\text{cm}$?



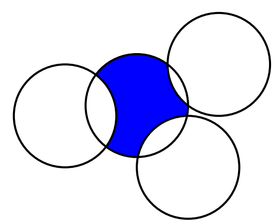
(a) 20 (b) 38 (c) 40 (d) 44 (e) 72

Problema 26. Los números 3, 4, 5, 6 y 7 deben distribuirse en los círculos de la figura de manera que el número dentro de cada triángulo sea el producto que se indica dentro. ¿Cuál es la suma de los 3 números que quedan alrededor del triángulo sombreado?



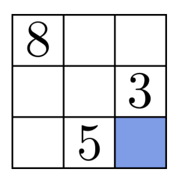
(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Problema 27. Cuatro circunferencias iguales con radio 1 se intersectan como se muestra. ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?



(a) π (b) $\frac{7\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) π^2 (e) 2π

Problema 28. En cada casilla de la cuadrícula que se muestra se debe poner un número entero positivo de manera que en cada renglón y en cada columna, el número de en medio sea el promedio de los otros dos. Ya se han escrito tres de los números. ¿Qué número debe ir en la casilla sombreada?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 29. Los vértices de un polígono regular de 20 lados están numerados del 1 al 20 de forma tal que si dos vértices son los extremos de un lado, entonces la diferencia de los números que tienen es 1 o 2. Los lados del polígono se pintan de rojo si la diferencia es 1. ¿Cuántos lados rojos hay?

(a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 10 (e) falta información

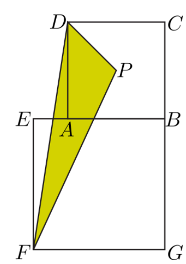
Problema 30. Hay 30 personas sentadas alrededor de una mesa redonda. Algunas llevan sombrero y otras no. Las que llevan sombrero siempre dicen la verdad. Las que no llevan sombrero siempre mienten. ¿Cuál es el máximo número de personas que pueden estar llevando sombrero si cada una de las personas dice: "Al menos una de las dos personas junto a mí no lleva sombrero."?

(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 25

Problema 31. Notamos que $2022 = 2222 - 200$, es decir, 2022 es la diferencia entre un número de 4 cifras $\overline{aaaa}$ y un número de 3 cifras $\overline{abb}$ (en este caso con $a = 2$ y $b = 0$). De todos los números que se forman así se toman el mayor y el menor. ¿Cuál es la suma de esos dos números?

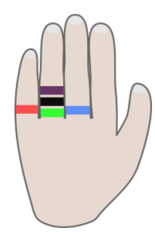
(a) 10000 (b) 10101 (c) 10211 (d) 10110 (e) 10011

Problema 32. Las diagonales de los cuadrados $ABCD$ y $EFGB$ miden 14 cm y 20 cm, respectivamente. El punto P es la intersección de las diagonales del cuadrado $ABCD$. ¿Cuántos cm^2 tiene de área del triángulo FPD?



(a) 58 (b) 60 (c) 63 (d) 66 (e) 70

Problema 33. Vero tiene 5 anillos en sus dedos, como se ve en el esquema. Se va a quitar los anillos de uno por uno. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

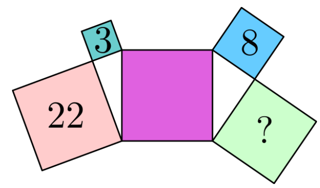


(a) 20 (b) 24 (c) 25 (d) 30 (e) 45

Problema 34. María escribió una lista de números que sumaban 22. Rita escribió una nueva lista donde los números eran el resultado de restarle al 7 cada uno de los números de la lista de María. Al sumar los números de su lista, Rita obtuvo 34. ¿Cuántos números había escrito María en su lista?

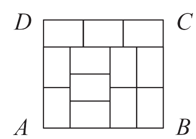
(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 35. En la figura que se muestra hay 5 cuadrados y 2 triángulos. Los números que aparecen en los cuadrados marcan sus áreas. ¿Cuál es el área del cuadrado que tiene el signo de interrogación?



(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17 (e) 18

Problema 36. El diagrama de la derecha muestra un rectángulo $ABCD$ dividido en 12 rectángulos iguales. Si AD mide 48 cm, ¿cuánto mide DC?

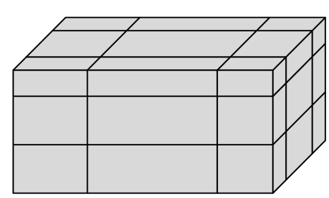


(a) 50 (b) 51 (c) 52 (d) 53 (e) 54

Problema 37. Un conejo y un erizo participan en una carrera a lo largo de una pista circular de 550 m. Los dos corren a una velocidad constante. La velocidad del conejo fue de 10m/seg y la del erizo fue de 1 m/seg. Empezaron al mismo tiempo pero en sentido contrario. En cuanto se encontraron, el erizo cambió de dirección, persiguiendo al conejo. ¿Cuántos segundos pasaron entre que el conejo llegó a la meta y el erizo alcanzó la meta también?

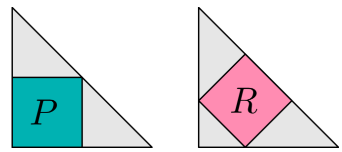
(a) 40 (b) 45 (c) 55 (d) 100 (e) 505

Problema 38. En la figura se muestra un cuboide de área 10 que se cortó a través de 6 planos, cada uno de los cuales es paralelo a una de las caras del cuboide, pero no se sabe a qué distancia. El cuboide se separa en los 27 cuboides que se forman. ¿Cuál es la suma de las áreas de los cuboides que se forman?



(a) 20 (b) 25 (c) 30 (d) 40 (e) ninguna de las anteriores

Problema 39. Dos triángulos isósceles congruentes tienen un cuadrado inscrito, como se ve en el diagrama. El cuadrado marcado con P tiene área 45. ¿Cuál es el área del cuadrado marcado con R?

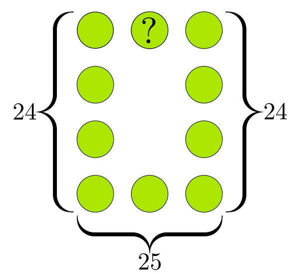


(a) 40 (b) 45 (c) 50 (d) 55 (e) 60

Problema 40. Ocho equipos participan en un torneo de fútbol. Cada equipo juega una vez contra cada uno de los demás. En cada partido, el ganador obtiene 3 puntos y el perdedor obtiene 0 puntos. En caso de empate, cada equipo obtiene 1 punto. Al final del torneo se observa que el total de puntos obtenidos por los equipos fue 61. ¿Cuál es el máximo número de puntos que puede haber obtenido el equipo que obtuvo más puntos?

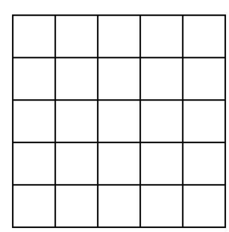
(a) 21 (b) 19 (c) 18 (d) 17 (e) 16

Problema 41. Los números del 1 al 10 deben distribuirse dentro de los círculos de la figura (uno en cada círculo). La suma de los 4 números en la columna de la derecha es 24 y también la suma de los 4 números en la columna de la izquierda es 24. La suma de los 3 números en la fila de abajo es 25. ¿Qué número va en el círculo que tiene el signo de interrogación?



(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 42. ¿Cuál es la menor cantidad de cuadritos que se deben colorear en la cuadrícula de 5×5, de forma que cada rectángulo de 1×4 o de 4×1 dentro de la cuadrícula tenga al menos un cuadrito coloreado?



(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 43. Los puntos A, B, C y D están en ese orden en una línea recta. La distancia de A a C es 12 cm; la distancia de B a D es 18 cm. ¿Cuántos centímetros es la distancia entre el punto medio de AB y el punto medio de CD?

(a) 15 (b) 12 (c) 10 (d) 9 (e) 6

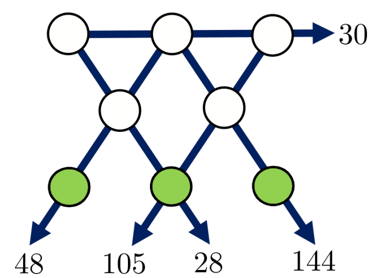
Problema 44. Un vendedor tiene 12 pesas que tienen todos los pesos enteros desde 1 Kg hasta 12 Kg. Las separó en tres grupos de 4 pesas cada uno. El peso total del primer grupo es de 26 Kg y el del segundo grupo es de 41 Kg. ¿Cuántos kilos pesa una de las pesas que está en el mismo grupo que la pesa de 9 Kg?

(a) 3 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 45. En un torneo participan 8 equipos. Al azar se distribuyen en parejas que se enfrentan entre sí. Los 4 ganadores de estos encuentros se distribuyen al azar en dos parejas que se enfrentan entre sí. Finalmente los 2 ganadores se enfrentan en la final. Si se sabe que en cada encuentro el equipo que gana es el mismo que el año pasado obtuvo mayor puntuación, ¿cuál es la probabilidad de que el equipo que quedó en segundo lugar en la clasificación del año pasado no llegue al encuentro final?

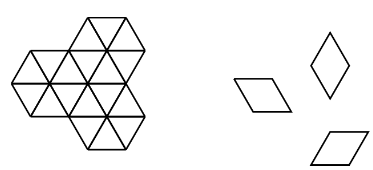
(a) 1 (b) 1/2 (c) 3/7 (d) 4/7 (e) 5/8

Problema 46. En la figura que se muestra se deben escribir los números del 1 al 8, uno en cada círculo. Los números en la punta de las flechas indican el producto que se obtiene al multiplicar los tres números que están en la línea recta con esa dirección. ¿Cuál es la suma de los números en los tres círculos sombreados en la figura?



(a) 12 (b) 15 (c) 17 (d) 18 (e) 21

Problema 47. ¿De cuántas formas se puede construir la hexagonícola que se muestra a la izquierda usando piezas como las que se muestran a la derecha?

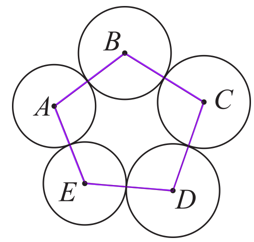


(a) 1 (b) 6 (c) 8 (d) 9 (e) 12

Problema 48. Un grupo de piratas obtuvo 200 medallas de oro y 600 de plata. Cada oficial se quedó con 5 medallas de oro y 10 de plata. Cada suboficial se quedó con 3 medallas de oro y 8 de plata. Cada cabo se quedó con una medalla de oro y 6 de plata. ¿Cuántos piratas había?

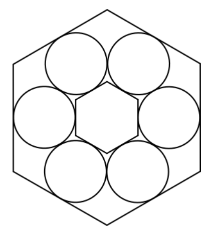
(a) 50 (b) 60 (c) 72 (d) 80 (e) 90

Problema 49. Con centro en los cinco vértices A, B, C, D y E de un pentágono se trazan círculos tangentes entre sí como se ve en la figura. Si $AB = 16\,\text{cm}$, $BC = 14\,\text{cm}$, $CD = 17\,\text{cm}$, $DE = 13\,\text{cm}$ y $AE = 14\,\text{cm}$, ¿cuál es el centro del círculo con el radio más grande?



(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

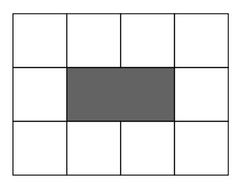
Problema 50. En la figura, los círculos son iguales y cada uno es tangente a sus dos círculos vecinos. Además cada círculo es tangente a un lado de cada uno de los dos hexágonos, como se muestra. Si el área del hexágono pequeño es igual a 1, ¿cuál es el área del hexágono grande?



(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) $3\sqrt{3}$ (e) $6\sqrt{3}$

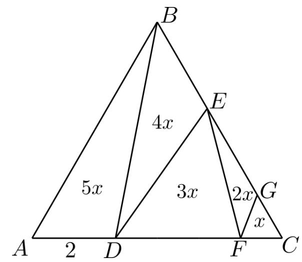
En los siguientes problemas deberás determinar la cantidad que se solicita. Los problemas que se incluyen aquí formaron parte de los exámenes semifinal y final de la 36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que se aplicó en varios estados de la república. Al final de este folleto encontrarás las respuestas.

Problema 51. En los cuadritos de la siguiente figura se deben distribuir los números enteros del 1 al 10 de tal forma que sean iguales las sumas de los números en cada columna y en cada renglón. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener esa suma?



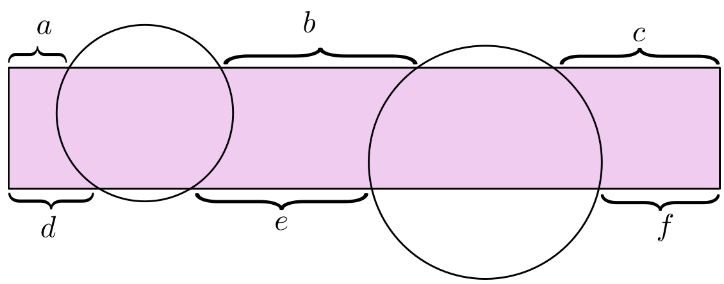
Problema 52. El producto de 3 números enteros distintos es 6336. Si el mayor es igual a 12 veces el menor, ¿cuál es la suma de los tres números?

Problema 53. El triángulo equilátero ABC está partido como se muestra en la figura. El área del triángulo GFC es x, el área del triángulo EFG es $2x$, el área del triángulo EDF es $3x$, el área del triángulo BED es $4x$ y el área del triángulo BAD es $5x$. Si $|AD| = 2$, ¿cuánto mide EG?



Problema 54. En un encuentro de basquetbol del equipo A contra el equipo B, el auditorio tiene asientos acomodados en un arreglo rectangular. En cada una de las filas se encuentran sentados 11 espectadores que apoyan al equipo A. En cada columna hay 14 espectadores que le van al equipo B. Quedaron vacíos 17 asientos. ¿Cuál es la mayor cantidad de asientos que puede tener el auditorio?

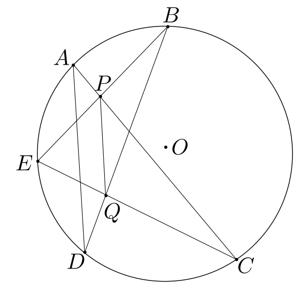
Problema 55. Dos círculos cortan un rectángulo y los segmentos fuera de los círculos miden a, b, c, d, e, f, como se muestra. Encuentra el valor de $a - b + c - d + e - f$.



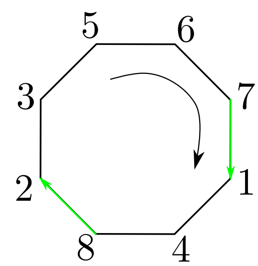
Problema 56. En una cuadrícula de $m \times n$ con $m, n \geq 3$, el número de cuadritos que tienen exactamente 3 cuadritos vecinos es igual al número de cuadritos que tienen exactamente 4 cuadritos vecinos. ¿Cuántos cuadritos tiene la cuadrícula? (Nota: Decimos que dos cuadritos de la cuadrícula son vecinos cuando comparten un lado.)

Problema 57. Determinar el mínimo número de colores necesario para pintar las diagonales de un polígono regular de 2022 lados si se necesita que cuando dos diagonales se intersecten en un punto interior al polígono, las dos diagonales tengan distinto color. (Nota: Llamamos diagonal de un polígono al segmento que une cualesquiera dos vértices del polígono que no pertenecen al mismo lado.)

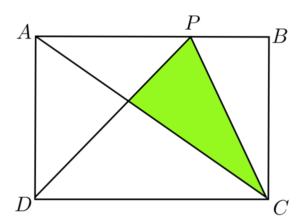
Problema 58. En una circunferencia con centro O se encuentran cinco puntos A, B, C, D y E (ver la figura). Los segmentos AC y EB se intersectan en el punto P; lo segmentos BD y EC se intersectan en el punto Q. Además PQ es paralela a AD. Encuentra el ángulo entre las líneas rectas EO y AD.



Problema 59. En un polígono regular de 8 lados se quieren numerar los vértices del 1 al 8 de forma tal que al moverse en las dirección de las manecillas del reloj los números vayan en orden creciente salvo en exactamente dos lugares. ¿De cuantas formas distintas puede hacerse esta numeración? En el esquema siguiente se muestra un acomodo posible.

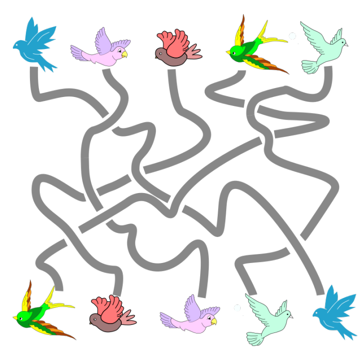


Problema 60. En el rectángulo $ABCD$ de área igual a 5, el punto P que se encuentra en el lado AB es tal que $AP = 2PB$. Si el área del triángulo sombreado es igual a 1, encuentra el área del rectángulo.



Soluciones de los Problemas

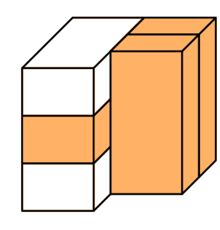
Solución 1. Basta seguir el camino al revés. Al final los pájaros quedan como se muestra. La respuesta es (b).



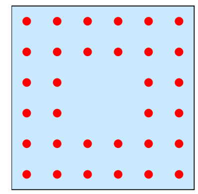
Solución 2. La cuadrícula tiene $6 \times 4 = 24$ cuadrados; los que no tienen tinta son los 4 de las esquinas. La respuesta es $24 - 4 = 20$. La respuesta es (e).

Solución 3. Desde arriba sólo se ven 5 discos. El orden de los colores de arriba a abajo (es decir, del centro a afuera) es azul, amarillo, azul, amarillo, naranja. La respuesta es (a).

Solución 4. Los que tocan exactamente a otros 3 son los dos blancos de la figura. La respuesta es (d).



Solución 5. Primera forma. Hay 2 filas de 6 puntos cada una a lo largo de cada lado, así que al desdoblar el tapete queda como se muestra, y la cantidad de puntos es $4 \times 6 + 8 = 32$.



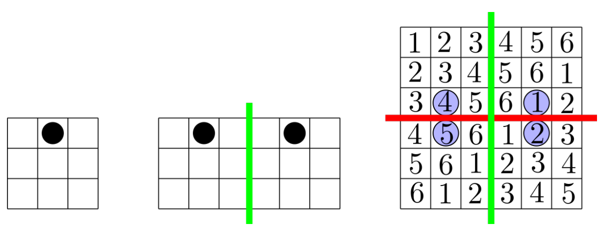
Segunda forma. Si todo el tapete estuviera cubierto de puntos, el número total sería $6 \cdot 6 = 36$. Faltarían 4 en el centro, así que el total de puntos del tapete es $36 - 4 = 32$. La respuesta es (e).

Solución 6. Los números pares: 2, 4 y 6 forman el triángulo rojo. Los números impares 1, 3 y 5 forman el triángulo verde. La respuesta es (e).

Solución 7. Al conectar los puntos con segmentos, se forman triángulos, todos iguales. Todas las figuras están formadas por 8 triángulos, salvo la opción (a), que está formada sólo por 7 triángulos. La respuesta es (a).

Solución 8. Notamos que no puede pasar por todos los cuartos porque empieza arriba en la figura y termina abajo. La mayor suma la encuentra cuando no pasa por el cuarto que tiene el 2, es decir, cuando el camino que sigue es: $1 - 5 - 6 - 7 - 3 - 4 - 8$, que tiene suma 34. La respuesta es (d).

Solución 9. La figura muestra los lugares de la perforación. La respuesta es (a).



Solución 10. Primera forma: La suma de los números que se ven en la casa de la izquierda es $6+2+5 = 13$, de manera que los que no se ven suman 7. Entonces la suma de los números que se ven en la casa de la derecha debe ser $20-7 = 13$. En el lugar donde está el signo de interrogación debe ir $13 - 3 - 1 = 9$.

Segunda forma: La información de que la suma de los números de cada casa es 20 no es necesaria: basta notar que las sumas de los números no comunes de las dos casas debe ser la misma, es decir, que los números a la derecha deben sumar $6 + 2 + 5 = 13$, así que el número faltante es $13 - (3 + 1) = 9$. La respuesta es (d).

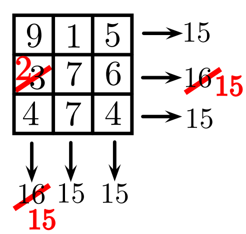
Solución 11. De arriba a abajo hay $2+1+1=4$ filas. De izquierda a derecha hay $3+1+5=9$. Entonces se trata de una cuadrícula de 4×9, que tiene 36 cuadritos. La respuesta es (e).

Solución 12. Deben escogerse las 2 redondas y con eso ya se tiene una figura sombreada. Si se escoge el cuadrado grande que esta sombreado ya se cumplirán todas las condiciones. La respuesta es (c).

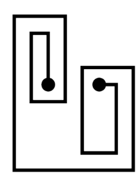
Solución 13. Notamos que la flecha hacia abajo multiplica por 4 y la flecha hacia arriba divide entre 4. Como hay 3 flechas hacia abajo y 3 flechas hacia arriba, es como si no se hiciera nada. De la misma manera, cada flecha hacia la derecha se cancela con una flecha hacia la izquierda y, como sobra una flecha hacia la izquierda, que divide entre 2, el resultado es $12\div 2=6$. La respuesta es (b).

Solución 14. Los números sobre los que pisará Cangu, al dividirlos entre 9 dejan residuo 3, 6, 7, 8 o 9. Entre 82 y 86 el único número que coincide con uno de esos residuos es 84, que al dividirlo entre 9, deja 3 de residuo. La respuesta es (c).

Solución 15. La suma en la mayoría de las líneas es 15, salvo en la primera columna y el segundo renglón, en los que la suma es 16, así que debe cambiar el 3 por un 2. La respuesta es (a).



Solución 16. Todas las opciones tienen vueltas en ambas direcciones, salvo la primera figura. La respuesta es (a).



Solución 17. La medida de cada lado del cubo es igual a seis veces la medida del lado más angosto del ladrillo, es decir, mide $6\times 4=24\,\text{cm}$. Para calcular las otras dimensiones del ladrillo basta notar que la mayor cabe dos veces en un lado del cubo y, entonces, mide $24/2=12\,\text{cm}$; mientras que la restante cabe tres veces en un lado del cubo y, por tanto, $24/3=8\,\text{cm}$. La respuesta es (c).

Solución 18. Por el centro del cuadrado dibujemos una línea recta vertical y una línea recta horizontal. El cuadrado grande queda dividido en 4 cuadrados, y en cada uno de ellos la figura sombreada es un triángulo que abarca la cuarta parte. Entonces el resultado es $100/4 = 25$. La respuesta es (b).

Solución 19. El número de votos contados es $11 + 10 + 9 + 8 + 7 = 45$; como esto es el 90% del total, quiere decir que faltan 5 votos de contar. Cualquiera de ellas puede ganar todavía pues $7 + 5 = 12 > 11$. La respuesta es (e).

Solución 20. En la figura de la izquierda el agua ocupa la cuarta parte del tanque, así que también debe hacerlo en la figura de la derecha. La respuesta es (e).

Solución 21. Para poder pasar por todos los hexágonos blancos, al entrar al hexágono central se debe salir inmediatamente después, así que cada camino está determinado por el lugar en el que se entra al hexágono central, lo cual puede hacerse a partir de cualquier hexágono blanco salvo el que también tiene lado en común con el que lleva la Y. La respuesta es (d).

Solución 22. La suma de las edades de las tres es $3 \times 10 = 30$. Como la suma de las edades de Ana y Beatriz es $2 \times 11 = 22$, entonces la edad de Carmen es de $30 - 22 = 8$ años. También, como la suma de las edades de Beatriz y Carmen es $2 \times 12 = 24$, entonces la edad de Ana es de $30 - 24 = 6$ años. Finalmente, la edad de Beatriz es de $30 - 8 - 6 = 16$ años. La respuesta es (d).

Solución 23. Al cortar el rectángulo a la mitad verticalmente notamos que quedan sombreados 3 de los 8 triángulos que se forman, y todos estos triángulos tienen la misma área. La respuesta es (a).

Solución 24. Si sumamos los números del primer renglón con los del tercero tendremos que hay 3 números en los cuadros verdes y 3 números en los blancos y el resultado de esa suma es $34 + 26 = 60$, de manera que la suma de un verde y un blanco es $60/3 = 20$. Así, en el cuadro negro debe ir el número $32 - 20 = 12$. La respuesta es (d).

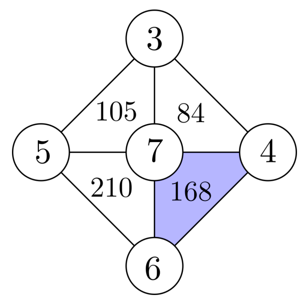
Solución 25. Primera forma: El número de fichas completas en cada lado es $\frac{19+1}{2} = 10$. El total es $4 \times 10 = 40$.

Segunda forma: La superficie que deben cubrir las fichas es $21^2 - 19^2$. Entonces el número de fichas es

$$\frac{21^2 - 19^2}{2} = \frac{(21-19)(21+19)}{2} = 21 + 19 = 40.$$

La respuesta es (c).

Solución 26. Todos los números son divisibles entre 7, así que el 7 debe ir en el centro. Los números divisibles por 5 son los dos de la izquierda, así que 5 va en el círculo de la izquierda. Completamos la figura escribiendo 3 arriba, 6 abajo y 4 a la derecha. La suma que se pide es $7+6+4 = 17$. La respuesta es (e).



Solución 27. Los dos arcos que se forman entre dos circunferencias que se intersectan son iguales entre sí, de manera que el perímetro es el mismo que el de la circunferencia: 2π. La respuesta es (e).

Solución 28. Primero notamos que el número en la casilla superior derecha debe ser un número par pues sumado con 8 debe ser par (para que el promedio sea un número entero). Como en la columna de la derecha el promedio es 3, las únicas posibilidades para esa casilla son 2 o 4. Intentamos con ambos y vemos que con 4 es imposible pues entonces tendría que ponerse a la derecha del 8 pero en la columna central abajo hay un 5 y el promedio de 5 y 6 no es un entero. Con 2 obtenemos que en la casilla sombreada va 4 y podemos llenar las casillas como se muestra. La respuesta es (e).

8	6	4
	?	3
	5	2

8	5	2
7	5	3
6	5	4

Solución 29. Primera solución. Afirmamos que el 1 y el 20 deben aparecer diametralmente opuestos. Si no fuera así, en alguna de las dos direcciones, el que lleva el número 1 estaría a lo más a 9 lados de distancia del que lleva el número 20, pero $1 + 9 \cdot 2 = 19 < 20$. Al estar diametralmente opuestos, en alguno de los dos sentidos aparecen los números pares en orden y en el otro los impares. Así hay 2 lados rojos exactamente: entre 1 y 2, y entre 19 y 20.

Segunda solución. A los lados de 1 solamente pueden estar el 2 y el 3, luego los números en los vértices quedan determinados por la regla, por ejemplo al lado de 2 está ya el 1 y en el otro lado el 4, al lado del 3 ya está el 1 y entonces en su otro lado queda el 5, y así sucesivamente, quedando de un lado los pares y del otro los impares. Solamente quedan dos lados rojos, los que unen el 1 con el 2 y el 20 con el 19. La respuesta es (b).

Solución 30. Notamos que de cada 3 personas seguidas, una de ellas debe estar sin sombrero, así que al menos 10 personas no llevan sombrero. Se ve que 10 es posible con el arreglo en el que al numerar las personas alrededor de la mesa exactamente las que tienen un número múltiplo de 3 no llevan sombrero. La respuesta es (d).

Solución 31. El mayor es cuando $a = 9$ y $b = 0$: $9999 - 900 = 9099$. El menor es cuando $a = 1$ y $b = 9$: $1111 - 199 = 912$. La suma de estos dos es $9099 + 912 = 10011$. La respuesta es (e).

Solución 32. Como P es punto medio de BD, el área de FPD es la mitad del área de FBD que, por tener ángulo recto en B, es $\frac{20 \times 14}{2} = 140$, así el área de FBD es $70\,m^2$. La respuesta es (e).

Solución 33. Los anillos del dedo anular debe quitarlos en orden, así que basta determinar los lugares en los que quitará los anillos del dedo meñique y del dedo medio que son las siguientes 20:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1-2, & 1-3, & 1-4, & 1-5, & 2-3, & 2-4, & 2-5, & 3-4, & 3-5, & 4-5, \\ 2-1, & 3-1, & 4-1, & 5-1, & 3-2, & 4-2, & 5-2, & 4-3, & 5-3, & 5-4. \end{array}$$

La respuesta es (a).

Solución 34. Si tomamos cada número original de María y lo emparejamos con el que calculó Rita a partir de él, tenemos que el resultado al sumar esos dos números es 7. Si sumamos todas esas parejas, obtendremos la suma del total de números, que sabemos que es $22 + 34 = 56$. Como cada pareja aporta 7 para la suma, en total debe haber $56/7 = 8$ parejas. La respuesta es (b).

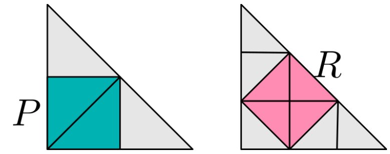
Solución 35. Usando los cuadrados a la izquierda y el teorema de Pitágoras, tenemos que el cuadrado central tiene área $22 + 3 = 25$. Ahora, usando otra vez el teorema de Pitágoras con el cuadrado central y los de la derecha, tenemos que el que lleva el signo de interrogación tiene área $25 - 8 = 17$. La respuesta es (d).

Solución 36. Si $a < b$ son las medidas de los lados de los rectángulos pequeños, entonces $AB = 3a + b$ y $CD = 3b$, pero $AB = CD$, de manera que $3a + b = 3b$ y así, $3a = 2b$. Por otro lado, $48 = AD = a + 2b$ y así $48 = a + 3a = 4a$, de donde $a = 12$ y $b = 3 \times 12/2 = 18$. Entonces $DC = 3b = 54$. La respuesta es (e).

Solución 37. En un mismo tiempo el conejo recorre 10 veces la distancia que el erizo así que se encontraron cuando el conejo llevaba $10/11$ del recorrido y el erizo llevaba $1/11$. Cuando el erizo cambia de dirección a ambos les faltaban $\frac{1}{11}550 = 50\,\text{m}$, los cuales el conejo recorrió en 5 segundos y el erizo en 50. La diferencia es de 45 segundos. La respuesta es (b).

Solución 38. Digamos que una cara del cuboide tiene área A. Un corte paralelo a esa cara agrega $2A$ a la suma y, como hay dos cortes paralelos a esa cara, en esa dirección la suma de las áreas es $2A + 2A + 2A = 6A$. Eso ocurre en cada cara, de manera que el área total se multiplica por 3. La respuesta es (c).

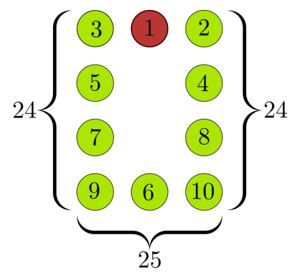
Solución 39. Cada triángulo se divide en triangulitos congruentes, uno en 4 partes y el otro en 9, como se muestra en la figura. Como el cuadrado que lleva la letra P tiene área 45, los dos triángulos isósceles originales tienen área 90, pero el triángulo de la derecha quedó partido en 9 triángulos, así que el área del cuadrado que tiene R es $4 \times 90/9 = 40$.



Nota. La justificación de que los triangulitos son congruentes en cada triángulo es porque son triángulos rectángulos isósceles y con iguales catetos. La respuesta es (a).

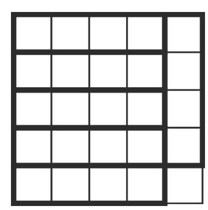
Solución 40. El número total de juegos es $8 \times 7/2 = 28$. Cada partido otorga entre 2 y 3 puntos, así que la diferencia cuando hay algún ganador es 1 punto por partido. Como $2 \times 28 = 56$ y $61 - 56 = 5$, quiere decir que sólo en 5 de los 28 partidos hubo ganador. Si en todos ellos el ganador fue el mismo equipo, éste pudo haber obtenido $3 \times 5 = 15$ en los que ganó y habría obtenido 2 puntos más en los otros 2 partidos en los que se enfrentó. El máximo entonces es $15+2 = 17$. La respuesta es (d).

Solución 41. La máxima suma posible de los números en las dos columnas y la fila de abajo es $(2 + 3 + \cdots + 10) + (9 + 10) = 73$, que justo es la suma $24 + 24 + 25$. El número que va en lugar del signo de interrogación debe ser el número 1. Podemos completar una posible distribución como sigue:

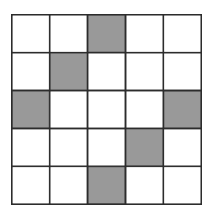


La respuesta es (a).

Solución 42. Es posible dividir la cuadrícula en cinco rectángulos de 4×1 y uno de 1×4 de manera que no se intersecten entre sí, como se muestra en la figura. Esto quiere decir que se necesitará al menos un cuadrito sombreado en cada uno de ellos, lo que indica que al menos se tienen que sombrear 6 cuadritos.



Por otro lado, si sombreamos como se muestra en la siguiente figura, cada vez que tomemos un rectángulo de 4×1 o de 1×4 quedará un cuadrito sombreado en su interior, así que bastan 6. La respuesta es (e).



Solución 43. Sin pérdida de generalidad supongamos que $A = 0$. Entonces $C = 12$ y si $b = AB$, entonces $D = 18 + b$. Los puntos medios son $b/2$ y $(b + 18 + 12)/2$. La distancia es

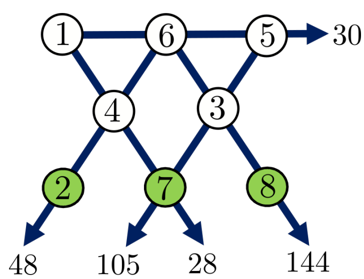
$$\frac{b + 18 + 12}{2} - \frac{b}{2} = 15.$$

La respuesta es (a).

Solución 44. El peso total es $1+2+\cdots+12 = 78\,\text{Kg}$, así que el tercer grupo pesa $78-(26-41) = 11$. La única forma de lograr 11 es con 1, 2, 3, y 5; también la única forma de lograr 41 es como $41 = 12+11+10+8$. Entonces los pesos restantes (que suman 26) son 4, 6, 7 y 9. La respuesta es (c).

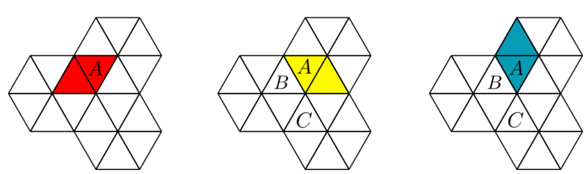
Solución 45. La única forma de que el equipo clasificado en segundo lugar el año pasado no llegue a la final es si le toca en el mismo grupo inicial que el clasificado en primer lugar. La respuesta es (c).

Solución 46. Dado que 30 y 105 son múltiplos de 5, tenemos que el 5 debe escribirse en la intersección de las líneas que marcan esas dos flechas. De manera análoga, el 7 debe escribirse en la intersección de las líneas que marcan las flechas con 28 y 105. El número faltante en la línea del 105 debe ser el 3. Como 30 y 48 son múltiplos de 3, pero 3 no está escrito en esas líneas, 6 debe escribirse en la intersección de las líneas marcadas por esas flechas. Esto obliga la posición del 1 y, en consecuencia, la del 4 y la del 2. El esquema queda de la siguiente forma:

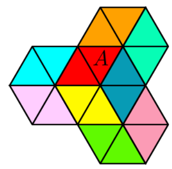


La respuesta es (c).

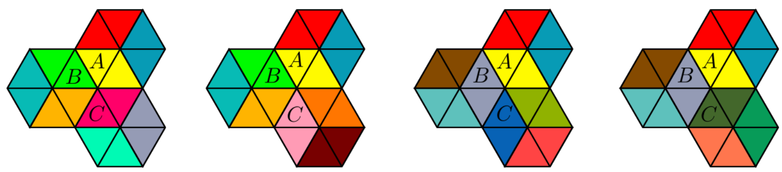
Solución 47. Hay 3 formas de cubrir el triángulo marcado con la letra A:



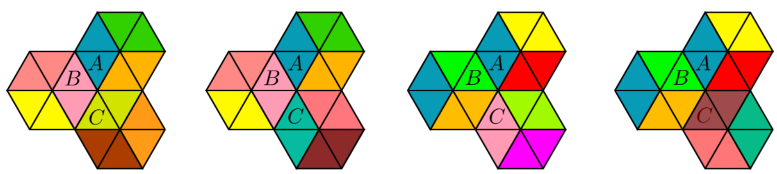
La de la izquierda sólo puede completarse de una manera.



En la segunda forma, hay dos formas de cubrir el triángulo marcado con B y cada una tiene dos formas de completarse de acuerdo a la elección de la cubierta del triángulo C.



De la misma manera, para la tercera elección de la cubierta de A, hay dos formas de cubrir el triángulo marcado con B y cada una tiene dos formas de completarse de acuerdo a la elección de la cubierta del triángulo C.



La respuesta es (d).

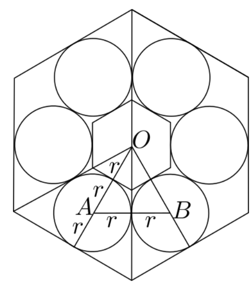
Solución 48. Primera forma. Digamos que el número de oficiales es o, el número de suboficiales es s y el número de cabos es c. Buscamos el valor de $o+s+c$, y la información que tenemos es que: $200 = 5o + 3s + 1c$ y $600 = 10o + 8s + 6c$. Al restar la primera ecuación de la segunda, obtenemos $400 = 5o + 5s + 5c$, de donde $o + s + c = 400/5 = 80$.

Segunda forma. Notamos que cada pirata recibió 5 monedas de plata más que de oro, así que si el número de piratas $\dfrac{600-200}{5} = 80$. La respuesta es (d).

Solución 49. Digamos que los radios de los círculos con centros A, B, C, D y E son a, b, c, d y e, respectivamente. Así $a+b = 16$, $b+c = 14$, $c+d = 17$, $d+e =$

13 y $e+a=14$. Sumando estas 5 ecuaciones obtenemos $2(a+b+c+d+e)=74$, de donde $a+b+c+d+e=37$. Pero los dos lados menores del pentágono son BC y DE y de aquí que $a=(a+b+c+d+e)-(b+c)-(d+e)=37-14-13=10$ es el mayor de los radios. La respuesta es (d).

Solución 50. Sean O el centro de la figura, A y B centros de dos círculos consecutivos (ver la figura). Por simetría, el triángulo OAB es equilátero. Sea r el radio de los círculos. Entonces, como $|AB|=2r$, tenemos que $|AO|=2r$, por lo tanto las alturas de los triángulos que forman el hexágono pequeño miden r. Pero entonces la altura de los triángulos que forman el hexágono grande miden $3r$ y de aquí que los hexágonos tienen sus longitudes en razón $1:3$, por lo que el área buscada es $3^2=9$. La respuesta es (b).



Solución 51. Digamos que los números ya están acomodados con la mínima suma S y que E es la suma de los números en las esquinas. Entonces, $4S=(1+2+\cdots+10)+E=55+E$. Tenemos que $E\le 7+8+9+10=34$, así que $4S\le 89$. Como S es un número entero, $S\le 22$. Veamos que, efectivamente, $S=22$ es el máximo. Para encontrar una solución, digamos que los números $a, b, c, d, x, y, r, s, t, u$ aparecen en la configuración como se muestra en la figura.

a	r	s	b
x			y
c	t	u	d

Tenemos que $a+r+s+b=c+t+u+d=22$, así que $(a+r+s+b)+(c+t+u+d)=44$, pero $a+b+c+d=E=33$, de donde $r+s+t+u=44-33=11$. La única posibilidad es $\{r,s,t,u\}=\{1,2,3,5\}$. Análogamente, $x+y=11$, así que $\{x,y\}=\{4,7\}$. Una posible solución se indica en la figura.

6	1	5	10
7			4
9	3	2	8

La respuesta es (22).

Solución 52. Tenemos que $6336 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$. Digamos que los números son $a < b < c$. Entonces $6336 = a \cdot b \cdot 12a$, de donde $2^4 \cdot 3 \cdot 11 = \frac{6336}{12} = a^2 b$. Por otro lado, a no puede tener factor 3 ni 11 puesto que 6336 no tiene factor 3^3 ni 11^2. Entonces $a = 2^2 = 4$, $b = 3 \cdot 11 = 33$ y $c = 48$, por lo que $a + b + c = 4 + 33 + 48 = 85$. La respuesta es (85).

Solución 53. Los triángulos ABD y DBC tienen la misma altura en B y, como $4x + 3x + 2x + x = 10x$, entonces el área de BDC es el doble del área de ABD, de donde $|DC| = 2|AD| = 4$ y así cada lado del triángulo equilátero ABC mide $2 + 4 = 6$.

Escribamos $d = |GC|$. Los triángulos FCG y FGE tienen la misma altura desde F y entonces el mismo argumento de arriba nos dice que $|EG| = 2|GC| = 2d$.

También los triángulos BDE y EDC tienen la misma altura desde D y, otra vez,

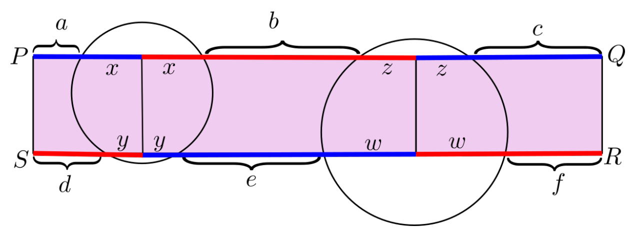
$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{4x}{x + 2x + 3x} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3},$$

de donde $|BE| = \frac{2}{3}|EC| = \frac{2}{3}3d = 2d$. Así $6 = |BC| = |BE| + |EG| + |GC| = 2d + 2d + d = 5d$, de donde $d = \frac{6}{5}$ y $|EG| = 2d = \frac{12}{5}$.

La respuesta es $(\frac{12}{5})$.

Solución 54. Sea f el número de filas y c el número de columnas. Entonces el número total de asientos es $fc = 11f + 14c + 17$. De aquí tenemos que $(f-14)(c-11) = 171 = 3^2 \times 19$. Como $f-14$ y $c-11$ son enteros positivos, las posibilidades para $(f-14, c-11)$ son $(1, 171)$, $(3, 57)$, $(9, 19)$, $(19, 9)$, $(57, 3)$,$(171, 1)$, así que las posibilidades para (f, c) son $(15, 182)$, $(17, 68)$, $(23, 30)$, $(33, 20)$, $(71, 14)$ y $(185, 12)$, y las posibilidades para fc son 2730, 1156, 690, 660, 994, 2220, el mayor es 2730. La respuesta es (2730).

Solución 55. Por el centro de cada círculo tracemos paralelas al lado menor del rectángulo. Sean x, y, z y w la mitad de las longitudes de las cuerdas, como se indica en la figura.

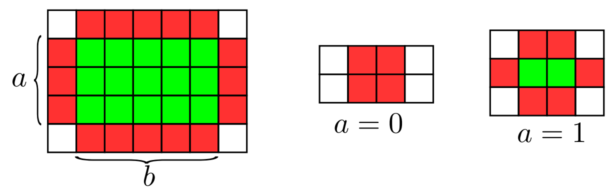


Como $a+x=d+y, \quad x+b+z=y+e+w, \quad z+c=w+f$ se tiene que,

$$(a+x)+(y+e+w)+(z+c)=(d+y)+(x+b+z)+(w+f).$$

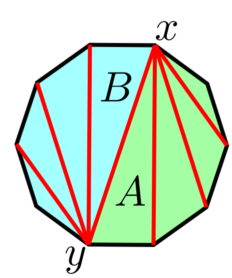
Cancelando x, y, z y w obtenemos $a+e+c=d+b+f$, por lo que $a-b+c-d+e-f=0$ La respuesta es (0).

Solución 56. Digamos que la cuadrícula es de tamaño $(a+2)\times(b+2)$ con $1\leq a\leq b$, de manera que el número de cuadritos que tienen 4 vecinos es ab, y el número de cuadritos que tienen 3 vecinos es $2(a+b)$. Tenemos así que $ab=2(a+b)$, de donde $(a-2)(b-2)=4$. Es claro que $a\geq 2$.



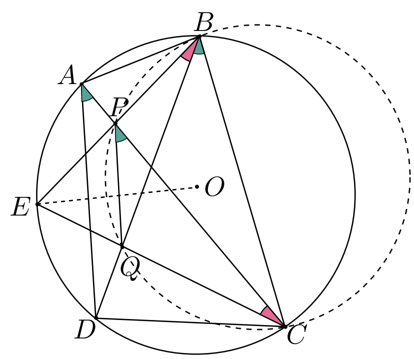
Entonces tenemos dos posibilidades: $a-2=1$ y $b-2=4$, en cuyo caso $a=3$ y $b=5$ y el número de cuadritos es $5\times 8=40$, o $a-2=2=b-2$, en cuyo caso $a=b=4$ y el número de cuadritos es $6\times 6=36$. La respuesta es (36).

Solución 57. Todas las diagonales que unen puntos diametralmente opuestos del polígono se intersectan en el centro del polígono. Son 1011 diagonales, así que al menos se necesitan 1011 colores. Ahora veamos que 1011 colores son suficientes. Para cada pareja $\{x,y\}$ de vértices diametralmente opuestos pintemos la diagonal que los une con un color; esa diagonal divide al polígono en dos lados A y B. Pintemos con el mismo color todas las diagonales que van de x a los vértices que quedaron en el lado A y también todas las diagonales que van de y a los vértices del lado B. En la siguiente figura cómo colorear de manera semejante las diagonales de un polígono de 10 lados.
La respuesta es (1011).



Solución 58. Como AD y PQ son paralelas y el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle QPC = \angle DAC = \angle DBC$. Así, también el cuadrilátero $PQCB$ es cíclico. Entonces

$$\angle ACE = \angle PCQ = \angle PBQ = \angle EBD.$$



Esto implica que los arcos AE y ED del círculo con centro O que contiene a A, D y E son iguales y de aquí que OE es perpendicular a AD.

La respuesta es (d).

Solución 59. Notemos que hay 8 posibilidades de acomodar el número 1 y que, una vez puesto el 1, basta escoger un subconjunto de $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ distinto de

$$\emptyset, \{2\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \ldots, \{2,3,4,5,6,7,8\}$$

para colocar sus elementos, en orden después del 1 para después colocar los números faltantes a continuación, también en orden (en el ejemplo del enunciado, el conjunto escogido es $\{4,8\}$). La cantidad de estos conjuntos es $2^7 - 8 = 120$, así que la respuesta es $8 \times 120 = 960$.

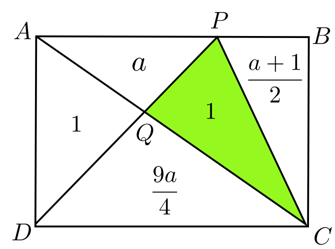
La respuesta es (960).

Solución 60. Dado un triángulo KLM denotamos su área por (KLM). Sea Q la intersección de AC con DP, y llamemos $a = (AQP)$. Tenemos que el triángulo AQP es semejante al triángulo CQD en razón $2:3$, así que $(CQD) = \frac{9a}{4}$. Sea x el área del rectángulo. Notamos que

$$(AQD) + \frac{9a}{4} = (ADC) = \frac{x}{2} = (DPC) = (PQC) + \frac{9a}{4} = 1 + \frac{9a}{4},$$

de donde $(AQD) = 1$.

También tenemos que $(APC) = 2\,(PBC)$ puesto que $AP = 2\,PB$, y entonces $(PBC) = \frac{a+1}{2}$.



Ahora de,

$$a + 1 + \frac{a+1}{2} = (ABC) = \frac{x}{2} = (DPC) = 1 + \frac{9a}{4},$$

obtenemos que, $a = 2/3$ y de aquí que $x = 2\left(1 + \frac{9\cdot\frac{2}{3}}{4}\right) = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5$.
La respuesta es (5).

Concentrado de Respuestas

1. (b)	16. (a)	31. (e)	46. (c)
2. (e)	17. (c)	32. (e)	47. (d)
3. (a)	18. (b)	33. (a)	48. (d)
4. (d)	19. (e)	34. (b)	49. (d)
5. (e)	20. (e)	35. (d)	50. (b)
6. (e)	21. (d)	36. (e)	51. 22
7. (a)	22. (d)	37. (b)	52. 85
8. (d)	23. (a)	38. (c)	53. $\frac{12}{5}$
9. (a)	24. (d)	39. (a)	54. 2730
10. (d)	25. (c)	40. (d)	55. 0
11. (e)	26. (e)	41. (a)	56. 36
12. (c)	27. (e)	42. (e)	57. 1011
13. (b)	28. (e)	43. (a)	58. d
14. (c)	29. (b)	44. (c)	59. 960
15. (a)	30. (d)	45. (c)	60. 5

Información de Contacto

Olimpiada Mexicana de Matemáticas:
Cubículo 201, Departamento de Matemáticas
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Colonia Copilco, Código Postal 04510, Delegación Coyoacán
Ciudad de México
Teléfono: (55) 5622-4864
Fax: (55) 5622-5410
Correo electrónico: omm@ciencias.unam.mx
Sitio Web: http://www.ommenlinea.org/

¡Síguenos en Facebook y en Twitter!

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas